# Injectivité de la transformée de Fourier :

## I Le développement

Le but de ce développement est de montrer que la transformée de Fourier est injective (résultat très utile en théorie des probabilités via la fonction caractéristique). Pour cela, nous allons tout d'abord redémontrer un premier résultat préliminaire et la formule de dualité avant de passer à la démonstration.

**Proposition 1 : [El Amrani, p.112]**
Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.
On a $\mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right) : \xi \longmapsto \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$.

**Preuve :**
On considère l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,\xi) & \longmapsto & e^{-bx^2}e^{-ix\xi} \end{array} \right.$$

— L'application $x \longmapsto f(x,\xi)$ est intégrable car $\int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$ (intégrale de Gauss).

— L'application $\xi \longmapsto f(x,\xi)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

— Pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi)\right| = \left|-ixe^{-bx^2}e^{-ix\xi}\right| \leq \left|xe^{-bx^2}\right| = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (majoration indépendante de $\xi$).

Donc par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on obtient :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right)'(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2} \times ixe^{-ix\xi}\mathrm{d}x$$

On a donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right)'(\xi) &= \frac{i}{2b}\int_{\mathbb{R}} -2bxe^{-bx^2}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \\ &\underset{I.P.P.}{=} \frac{i}{2b}\left[e^{-bx^2}e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i}{2b}\int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2} i\xi e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{-\xi}{2b}\int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{-\xi}{2b}\mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right)(\xi)\end{aligned}$$

Ainsi, l'application $\mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right)$ est solution du problème de Cauchy suivant :

$$(PC) : \left\{ \begin{array}{l} y'(t) + \frac{t}{2b}y(t) = 0 \\ y(0) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \end{array} \right.$$

Finalement, on donc bien $\mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$.

■

**Lemme 2 : Formule de dualité [El Amrani, p.115] :**
Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v)g(v)\mathrm{d}v$$

**Preuve :**
Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.
D'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left|f(u)g(v)e^{-iuv}\right|\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|\mathrm{d}u \int_{\mathbb{R}} |g(v)|\mathrm{d}v = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$$

Le théorème de Fubini donne alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\left(\int_{\mathbb{R}} g(v)e^{-iuv}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-iuv}\mathrm{d}u\right)g(v)\mathrm{d}v \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v)g(v)\mathrm{d}v\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule de dualité annoncée.

■

**Théorème 3 : [El Amrani, p.115]**
La transformation de Fourier :

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est une application injective.

**Preuve :**
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{f} = 0$.
Considérons (pour $s > 0$ fixé) le noyau de Gauss :

$$\gamma_s : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}}$$

Posons, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, $g_s : x \longmapsto \gamma_s(x) e^{iax}$.
Par la formule de dualité (puisque $f, g_s \in L^1(\mathbb{R})$), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g_s}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u) g_s(u)\mathrm{d}u = 0 \quad (\text{car } \widehat{f} = 0)$$

Or, on a aussi :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g_s}(u)\mathrm{d}u &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{\gamma_s}(u-a)\mathrm{d}u \quad (\text{car } \widehat{g_s} = \tau_{-a}(\widehat{\gamma_s})) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{\gamma_s}(a-u)\mathrm{d}u \quad (\text{car } \widehat{\gamma_s} \text{ est paire}) \\
&= (f * \widehat{\gamma_s})(a) \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{s}} (f * \gamma_{s^{-1}})(a) \quad (\text{d'après le lemme avec } b = \frac{1}{2s}).
\end{aligned}$$

On tire de cette double estimation que pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $(f * \gamma_{s^{-1}})(a) = 0$.

Or, $(\gamma_{s^{-1}})_{s \in \mathbb{R}_+^*}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$ et donc :

$$\lim_{s\to+\infty} \|f * \gamma_{s^{-1}} - f\|_1 = \begin{cases} \lim\limits_{s\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |(f * \gamma_{s^{-1}})(a) - f(a)|\mathrm{d}a & = \|f\|_1 \\ 0 \end{cases}$$

Ainsi, puisque $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $L^1(\mathbb{R})$, on a $f \underset{p.p.}{=} 0$.

∎

# II Remarques sur le développement

## II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans le développement, on a utilisé à la fin de la preuve du théorème que $(\gamma_{s^{-1}})_{s \in \mathbb{R}_+^*}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$ (ce qui se vérifie en vérifiant les conditions de la définition).

## II.2 Pour aller plus loin...

On peut également montrer que la transformée de Fourier n'est pas surjective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en utilisant les fonctions $f_n : x \longmapsto \frac{4}{x^2}\sin(nx)\sin(x)$. Cependant, on peut montrer que l'image de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ :

**Proposition 4 :**
La transformation de Fourier est une application non surjective mais son image est dense dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

**Preuve :**
$*$ On pose $g_n = \mathbb{1}_{[-n;n]}$ et $h = \mathbb{1}_{[-1;1]}$.
Un calcul donne alors que $g_n * h$ vaut 2 sur $[-n+1; n-1]$, 0 en dehors de $[-n-1; n+1]$ et linéaire sur $[-n-1; -n+1]$ et $[n-1; n+1]$.

$*$ Calculons la transformée de Fourier de $g_n * h$ :
On a $\mathcal{F}(g_n * h) = \mathcal{F}(g_n)\mathcal{F}(h)$ et on sait de plus que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \ \mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-a;a]})(x) = 2\frac{\sin(ax)}{x}$$

On obtient donc $\mathcal{F}(g_n * h)(x) = f_n$ qui est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. La formule d'inversion de Fourier donne alors $\overline{\mathcal{F}}(f_n) = 2\pi g_n * h$ et puisque les fonctions $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ coïncident sur les fonctions paires, on a $\mathcal{F}(f_n) = 2\pi g_n * h$.

$*$ Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 = +\infty$ :

$$\|f_n\|_1 \geq C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin(nx)}{x}\right| \mathrm{d}x \geq C \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \left|\frac{\sin(u)}{u}\right| \mathrm{d}u$$

Donc $\|f_n\|_1$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$ puisque la fonction $u \longmapsto \left|\frac{\sin(u)}{u}\right|$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

$\ast$ Si la transformée de Fourier était surjective, puisqu'on sait qu'elle est injective et que $L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont des espaces de Banach, elle serait automatiquement un isomorphisme d'espace de Banach. En particulier, la réciproque serait continue, et il existerait $C > 0$ telle que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on aurait :

$$\left\| \widehat{f} \right\|_\infty \geq C \left\| f \right\|_1$$

Or ceci n'est pas possible en testant cette égalité avec $f = f_n$, car on a $\left\| \widehat{f_n} \right\|_\infty = 2\pi \left\| g_n * h \right\|_\infty = 4$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left\| f_n \right\|_1 = +\infty$.
La transformée de Fourier n'est donc pas un opérateur surjectif de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\ast$ Cependant, la transformée de Fourier étant un isomorphisme de l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions à décroissance rapide, son image contient $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui est dense dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc l'image de la transformée de Fourier est dense dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

■

## II.3 Recasages

Recasages : 234 - 235 - 236 - 239 - 244 - 250.

# III Bibliographie

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.